BRØKERNE ER USYNLIGE UDENFOR

Tekst
Nanna Skovsgaard, adjunkt,
læreruddannelsen, UCN
Steffen Elmose, lektor,
læreruddannelsen, UCN

Indledning

"ENGANG VAR JEG MISUNDELIG PÅ EXPERIMENTARIUM I KØBENHAVN, MEN DET ER JEG IKKE MERE NU. VI HAR VORES EGET KÆMPE STORE EKSPERIMENTARIUM. DET ER BARE SPØRGSMÅLET OM AT FINDE DET OG GRIBE DET."

Således siger en lærer fra en nordjysk skole, som Nanna (hovedforfatter) var på besøg ved, og fik lov til at følge en 4. klasse og en 5. klasse i matematikundervisningen.

I artiklen gives der eksempler fra Nannas egne erfaringer fra forskningsprojektet udeskole. Jeg (Nanna) vil hovedsageligt fokusere på 5. klassen, som i perioden arbejdede med brøker som omdrejningspunkt. Klassen havde arbejdet med brøker på forskellige måder, og lærerens mål var, at de fik oplevet brøkerne på så mange forskellige måder som muligt og derved fik en bedre forståelse for brøkbegrebet. "Mange forskellige tilgange til det. Det mener jeg bestemt, er vejen frem for dem" nævnte læreren i flere omgange, som et meget centralt fokuspunkt.

I denne artikel vil jeg derfor behandle de forskellige steder, som eleverne besøgte i forbindelse med forløbet om brøker, og i den forbindelse vil jeg komme med ideer til, hvordan læreren i sin forberedelse og planlægning af et undervisningsforløb i matematik kan medtænke nogle didaktiske modeller, der kan fremme elevernes forståelse af brøkbegrebet.

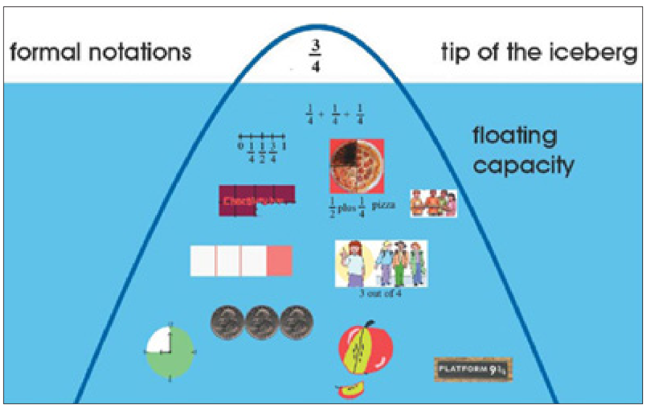
Brøker i 5.a – Hvad skal eleverne lære?

Ligegyldigt om udeskole er et element tilknyttet undervisningen, er det altid centralt at overveje, hvad eleverne skal lære i undervisningen om brøker. Først undersøges – "hvad skal eleverne lære?" – inden der planlægges –"hvad skal de lave?". Læreren, som jeg besøgte, havde som mål, at eleverne skulle lære, forstå og opleve brøker på forskellige måder og i forskellige sammenhænge og dermed udvide deres forståelse af, hvordan brøker bliver brugt i hverdagen. Målet kan knyttes an til FFM-målet for tal og algebra (6. klassetrin): "Eleven kan anvende decimaltal og brøker i hverdagssituationer." Desuden kan inddrages FFM-målet vedrørende regnestrategier: "Eleven kan udvikle metoder til beregninger med decimaltal, enkle brøker og negative hele tal."

Isbjergsmodellen

Når der tales om at udvide elevernes forståelse af et begreb, kan det være centralt at bringe isbjergsmodellen (Webb et al., 2008) ind i sammenhængen. Denne model, der er udviklet af Freudental Instituttet i Holland, kan anvendes som et værktøj for læreren, når et forløb skal planlægges. Den kan støtte læreren i at rette opmærksomheden mod elevernes læreprocesser og strategier.

Figur 1 viser et eksempel på, hvor meget 'forståelse' der egentlig ligger gemt bag en formel repræsentation som ¾. Figuren er opbygget af formelle,



FIGUR 1
Isbjergsmodellen
(Webb, 2008)

før-formelle og uformelle repræsentationer. I eksemplet med brøker er ¾ den formelle repræsentation (toppen af isbjerget), og for at forstå, hvad ¾ i virkeligheden er, ligger der før-formelle og uformelle repræsentationer bag, det vil sige, det som ligger under 'vandoverfladen'. Eksempler på før-formelle repræsentationer kan være tallinjen, skravering af figurer og ¼ + ¼ + ¼. Eksempler på uformelle repræsentationer kan være deling af æbler eller brøker, som bruges direkte i virkeligheden, fx ¼ liter mælk.

Ideen bag isbjergsmodellen er, at elever, der kun arbejder med formaliserede algoritmer, typisk glemmer fremgangsmåder og procedurer. Isbjergsmodellen er med andre ord en metafor, der viser, hvordan elevers brede erfaringer og mange forskellige repræsentationer kan understøtte elevernes læring, så den formaliserede del bliver meningsfuld.

Som led i planlægningen af undervisning kan det være en ide at overveje hvilke uformelle og før-formelle repræsentationer som ligger bag det formelle begreb. Modellen kan anvendes i et lærerteam til at udforske et områdes underemner og derudover finde et bredt og varieret udbud af uformelle, før-formelle og formelle repræsentationer. Som oftest er de før-formelle og uformelle repræsentationer kontekstbundne, og derfor giver udeskole og det, at eleverne arbejder med noget konkret fra hverdagen, rigtig god mening.

Floating capacity er et begreb fra modellen, der betyder, at jo større isbjerget er under vandet, jo sikrere grundlag har eleven. Dette hænger utrolig godt sammen med lærerens mål med det undervisningsforløb, som jeg fulgte. Her var målet også, at eleverne skulle få oplevet brøkbegrebet på mange forskellige måder og derved få dannet mange forskellige repræsentationer for brøkbegrebet. At brøkerne optræder i mange sammenhænge i vores hverdag, er ikke umiddelbart synligt for eleverne. For eksempel tænker man ikke umiddelbart på brøker, når man deler et æble eller en kage. Det er således centralt for læreren at overveje, hvordan matematikken i vores omgivelser kan blive mere synlig i undervisningen.

Brøker ved den lokale grønthandler
5. klassen besøgte den lokale grønthandler i forbindelse med forløbet. Et af målene var her, at eleverne skulle besøge et autentisk sted med rigtige bananer og appelsiner og opstille deres egne brøker ud fra det, som de så. Her gik deres undersøgelser fx ud på, at hvis der både lå appelsiner og bananer i en kasse, så fandt de ud af, hvor mange stykker frugt, der var i kassen, og så hvor stor en andel, der var bananer, og hvor stor en andel, der var appelsiner.

Her var det tydeligt at mærke på læreren, at hun var meget overrasket over sine elever. "Det er helt utroligt, hvad de fik ud af det, og hvad de kom med af resultater – det var alle steder, hvor de kunne opstille brøker. Jeg havde måske selv fundet tre steder. Jeg havde slet ikke den samme fantasi."

Jeg fulgte to elever, som efter turen fortalte om de billeder, som de havde taget i forbindelse med deres undersøgelse. De benyttede vendinger som "hvor mange… ud af", fx hvor mange æbler var grønne ud af alle æblerne. Det var den samme vending, som eleverne benyttede i alle deres fortællinger omkring de billeder, som de havde taget. I den forbindelse var det tydeligt, at de har opnået en forståelse af, at brøker fx er en mindre del ud af det hele. Men det blev dog ikke italesat af eleverne selv, at brøker handlede om, hvor stor en del der var grønne æbler. De to elever her var meget fokuseret på at tælle rigtigt, hvad angår antallet af æbler.

Øverste billede viser et eksempel på, at eleverne også undersøgte flødeboller og i den forbindelse, hvor mange som var med kokos, og hvor mange der var i alt.

Brøker i skolegården – skud på mål
Eleverne arbejdede også med brøker i skolegården. Her indgik der også bevægelse. De blev opdelt i grupper af ca. fire-fem elever og roterede ved seks forskellige poster, hvor det handlede om at score på forskellige mål. En post handlede fx om skud på mål i form af straffespark. Eleverne fik hver ti skud på mål med en fodbold, og bagefter skulle de beregne, hvor stor en andel der gik i mål. Ved andre poster skulle eleverne fx score på en basketkurv eller kaste ærteposer ind i en hulahopring. I slutningen af lektionerne tog eleverne

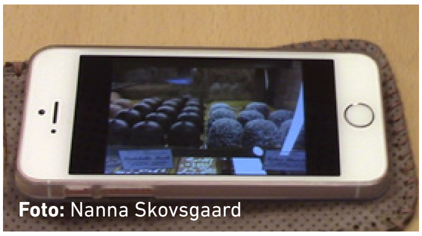


Foto: Nanna Skovsgaard

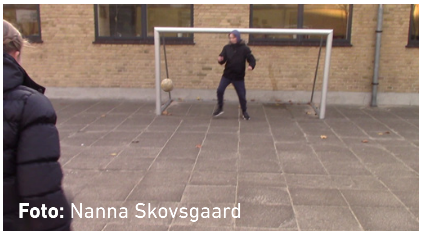


Foto: Nanna Skovsgaard

Billedet herunder viser det udleverede ark, som eleverne skulle udfylde. Eleven her har noteret korrekt antal scoringer, men mangler det næste skridt – at anvende brøken som repræsentation for antal scoringer ud af antal mulige.

Foto: Nanna Skovsgaard

deres data med ind i klassen og regnede videre.

Disse aktiviteter i skolegården i forhold til 'scoringer' havde som fokus, at eleverne skulle lære forståelse af brøkbegrebet og forståelse af tiendedele. De skulle med andre ord også få en kropslig forståelse af, hvad det vil sige at score fx 3 ud af 10 gange eller 10 ud af 10 gange. Denne tilgang flugter med Arne Jordets argument for at gøre elevernes personlige matematik til skolematematik, ved at læreren tager udgangspunkt i, hvad eleverne gør og siger, og derefter omsætter det kendte til matematiske repræsentationer (Jordet, 2003).
Læreren siger i den forbindelse: "Jeg tænker meget på, hvordan jeg skal gøre det og få det belyst på forskellige måder. Nogle kan se det med deres øjne, nogle kan høre det med deres ører, og det er lige før, jeg kan få dem til at mærke en brøk. Jeg valgte i dag en fællesnævner på ti. Næste gang skal de begynde at lægge brøkerne sammen, og det er der, de bliver udfordret, for hvordan gør vi så det? Og så kan vi jo

begynde at referere det til, hvis vi laver en af øvelserne om, så vi har 5 skud i stedet for 10."
Lærerens udtalelse indeholder flere eksempler på hans inddragelse af personlige oplevelser med matematik, som ligger 'under vandlinjen' i isbjergs-modellen. En gradvis udvikling fra hverdagssprog til uformelle repræsentationer ("3 ud af 10") til indførelse af formelle repræsentationer som tæller, nævner og brøkstreg.
Jeg fulgte en gruppe med tre piger og en dreng. Gruppen diskuterer først, om der skal være en målmand foran målet eller ikke, men de finder hurtigt ud af, at det må blive for let, hvis der ingen målmand er, og de bestemmer sig for, at der skal være en målmand. De beslutter sig derudover for, at den, der skyder, ikke også skal notere på papiret. Den ene pige går i gang med at skyde på mål og scorer de første mange gange, hvilket også bliver noteret på papiret.

Der er således et stort skridt fra en hverdagserfaring med straffespark til et formelt sprog i matematik med en brøk og til at vide, at en formel brøk består af tæller, nævner og brøkstreg. Men omvendt var der også noget, som tydede på, at pigen udmærket vidste, hvor mange scoringer der var lavet, og hvor mange skud der var i alt. Det var blot bindeleddet imellem disse to, som manglede.

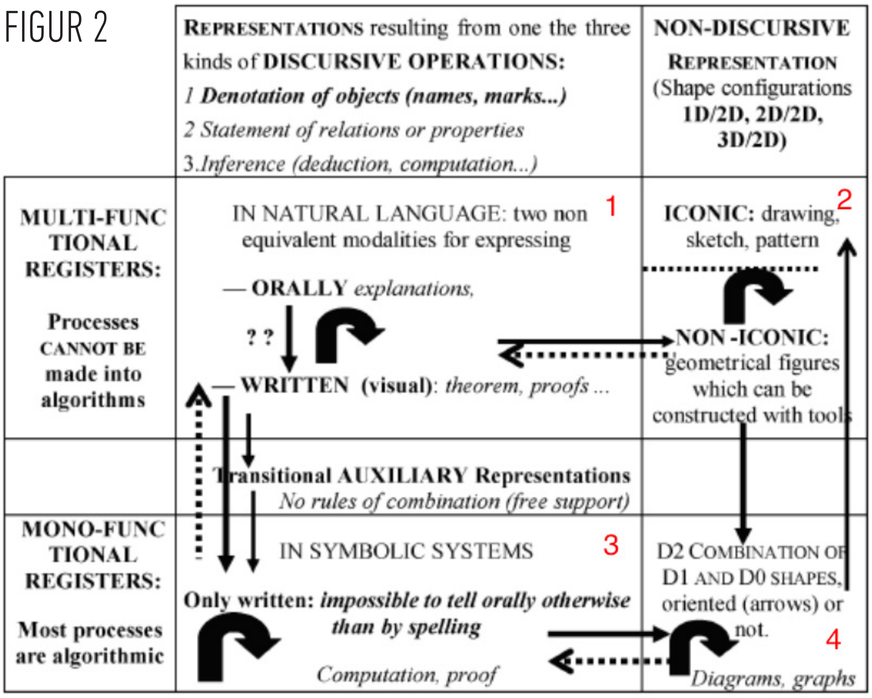
Brøker i skoven
Et andet sted, hvor eleverne arbejdede med deres forståelse af brøker, var i skoven. Eleverne lavede brøker ud af grene og blade fra skoven. De brugte grenene som ramme for forskellige felter og blade af forskellige farver blev brugt som illustration af opdelingen inden i feltet. Læreren sagde i den forbindelse: "Vi snakkede om med ord, hvordan det så ud, og så gik de rundt til hinanden i grupper og snakkede om, hvordan de havde gjort det, og hvad deres felter viste".

Et par argumenter for, hvorfor udeskole kan anvendes i arbejdet med brøker
Der findes mange grunde til, at udeskole og brøker kan være et godt makkerpar i et undervisningsforløb. Jeg vil nu blot nævne et par af de grunde, som jeg fik øje på under mine observationer på skolen.
Først og fremmest er det værd at nævne, at den besøgte klasse er vant til at arbejde ude. Jeg hørte ikke en eneste elev, som beklagede sig over det lidt kolde vejr, men de glædede sig ligefrem til at komme ud. De var meget motiveret for de varierede undervisningsformer. Derudover blev eleverne matematiske kompetencer sat i spil på en anderledes måde, da de var ude. I hver aktivitet skulle de forbinde virkeligheden til deres matematiske viden og hele tiden være kritiske over for det, som de fandt ud af i forhold til konteksten. Denne anvendelse af matematiske kompetencer flugter med, hvad Rune Hansen kalder mestringsorienterede kompetencer, hvor elever og lærere er optaget af, at eleverne udvikler en meningsstyret mestring af en færdighed, i modsætning til en præstationsorienteret kompetence, hvor det mere er færdigheden for præstationens skyld (Hansen, 2015).
I forløbet var der flere af de matematiske kompetencer, som let kom i spil, og hvis der skulle fremhæves nogle, kunne det især være repræsentations-, modellerings- og problembehandlings-kompetencen.

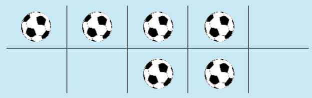
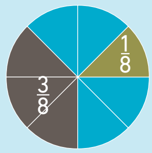
Modelleringskompetencen kom i spil, da den handler om at omsætte mellem virkeligheden og matematikken – her aktiviteten med skud på mål. Ligeledes er problembehandlingskompetencen meget central, da den handler om at opstille og løse problemer, og den benyttede eleverne især ved grønthand-leren, da de fx opstillede brøker ud fra det, de oplevede og så.
Men også repræsentationskompetencen kan anvendes og være meget meningsfuld i forhold til udeskole. Repræsentations- og symbolbehandlingskompetencen vedrører anvendelse og forståelse af repræsentationer i matematik, herunder matematisk symbolsprog. Dette vil jeg udfolde lidt mere ved hjælp af Duvals (2006) skema om repræsentationer.

Registermodellen – når elever har vanskeligheder med repræsentationer
Duval (2006) har forsøgt at indkredse nogle af de kognitive læringsvanskeligheder, der kan opstå, når et fag som matematik skal læres. Det påpeges, at de matematiske objekter ikke kan ses eller røres, men at der findes semiotiske repræsentationer for dem. I og med at disse objekter ikke er konkrete, kræves det, at eleverne kan forstå forskellige semiotiske repræsentationer for det samme objekt. Kognitive vanskeligheder kan opstå hos eleverne

FIGUR 2



Klassifikation af de fire registre, som kan blive mobiliseret i matematiske processer
(Duval, 2006, s. 110) Reprinted by permission from RightsLink: Springer. Educational Studies in Mathematics : A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics, Duval, R., 2006

BRØKER:	SPROGLIGE REGISTRE	VISUELLE REGISTRE
MULTIFUNKTIONEL	• Hvor mange dele der er ud af helheden • "ud af" • et tal, som vises vha. division • tæller/nævner/ brøkstreg	 
MONOFUNKTIONEL	1/3 1/8 3/8 Regneregler for brøker	

FIGUR 3

Figuren viser mulige overgange fra et sprogligt register til et visuelt register samt, i det lodrette system, en mulig overgang fra et hverdagssprogligt multifunktionelt register til et fagsprogligt monofagligt register. (Figuren er udarbejdet af Nanna Skovsgaard)

gennem deres forsøg på at anvende og forstå disse forskellige repræsentationer af det samme objekt. Duval (2006) har opstillet en figur, som fx kan bruges til at analysere og finde frem til en elevs læringsvanskelighed eller som et analyseredskab i planlægningsfasen af et undervisningsforløb for se nærmere på, om undervisningen kan lægge op til arbejde i alle modellens fire semiotiske registre.

Figuren består af fire semiotiske registre, angivet her som 1, 2, 3 og 4. De omfatter det multifunktionelle register, som ikke er baseret på regler og algoritmer, og det monofunktionelle register, som oftest er baseret på algoritmer. Det kan desuden ses i forhold til de diskursive (sproglige) eller ikke-diskursive (visuelle) repræsentationer. Register 1 omhandler de matematiske beskrivelser, analyser og tolkninger, som er holdt i hverdags- og fagsprog. Register 2 indeholder ikoner, fx tegninger, skitser og mønstre, samt ikke-ikoniske, fx geometriske figurer. I register 3 er der kun det skrevne i symbolsprog, fx beregninger og beviser, og register 4 indeholder diagrammer og grafer.

Mellem registrene ses nogle forskellige former for pile. De viser processer, der kaldes transformering, og som enten kan foregå mellem registre eller inden for samme register. Mellem registrene er der lige pile, som er omdannelse, og inden for samme register er de buede pile, som er omformning. (Duval, 2006).

Pointen med denne figur i forhold til udeskole er, at der ligger et stort læringspotentiale for eleverne, når undervisningsforløbet giver dem mulighed for at komme omkring både det sproglige og visuelle inden for det multifunktionelle og det sproglige og visuelle inden for det monofunktionelle. Det kan sammenholdes med isbjergsmodellen, som især handlede om, at floating capacity (det under vandoverfladen) skulle være så stort som muligt for skabe en bred begrebsforståelse. Med udgangspunkt i Duvals (2006) figur, kan man sige, at jo bedre eleven er til at transformere mellem de forskellige registre og inden for samme register – jo bedre forståelse har eleverne af begrebet eller emnet. Ifølge Duval (2006) ligger elevernes vanskeligheder især i skiftene mellem registrene. Ved indsigt i figuren kan vi få en forståelse af, hvad der er svært for eleverne med hensyn til at få en forståelse af matematik. Ved at være bevidste om transformermationerne i og mellem registre har vi mulighed for at hjælpe eleverne med forståelsen af matematikken.

Et eksempel på en vanskelig transformation er fx straffesparksaktivtiteten med pigen, som skal notere en brøk for skaffesparkene. Hun befinder sig umiddelbart godt i det sproglige og visuelle multifunktionelle register, men har vanskeligheder, da hun skal omdanne det til det monofunktionelle. Ovenfor ses eksempler på de fire forskellige registre med brøker:

Afsluttende kommentarer omkring udeskole og matematikundervisning
Det var tydeligt, at den lærer, som jeg besøgte, var meget motiveret og engageret i forhold til at benytte udeskole i sin undervisning. Klassen havde allerede etableret en ny didaktisk kontrakt og var vant til at have undervisning andre steder end i klasselokalet. Samtidig var klassen 'gjort klar' til at være ude. Læreren havde inden mit besøg arbejdet meget med klassen omkring regler og strukturer, når de var uden for klasselokalet.

"DET SKAL STRUKTURERES FOR DEM FX MED KEGLER, HVOR GRUPPE 1 STARTER VED KEGLE 1. ELLERS KAN DET LET GÅ OP I HAT OG BRILLER."

Læreren nævnte endvidere, at hvis man har en meget 'levende' klasse, så kan man som lærer tit være bekymret for at gå ud og "[...] her kan det være en ide at begynde udeskole med at vælge steder, hvor eleverne er synlige hele tiden, som fx skolegården, da vi havde aftalt, at det omhandlede brøkregning, og at de skulle score mål. De forsvandt heller ikke ud af billedet." Men ud over at klassen skal forberedes, gjorde læreren også meget ud af at fortælle, at omgivelserne omkring skolen skal gøres opmærksomme på, at klassen (eller hele skolen) benytter udenomsarealerne eller byen. Fx havde læreren lavet aftaler på forhånd med grønthandleren og ejeren af skoven om, at det var i orden, at klassen befandt sig i skoven, herunder fx at de klippede grene af træerne, eller at de måtte røre ved frugterne ved grønthandleren. Derudover havde skolen haft en artikel i lokalavisen om, at skolen fremover vil begynde at benytte byen mere som en del af undervisningen.
Et andet element og en idé, som kunne nævnes i forbindelse med udeskoles potentialer, kunne være koblingen til IT. Eleverne kunne anvende det materiale, fx data eller billeder, som de anskaffer sig, når de er ude, ved at indsætte deres billeder i GeoGebra eller i et begrebskort. Derved kan de få deres personlige og autentiske billeder koblet til deres begrebsforståelse.
Det tredje element, som viste sig at være en af de mest centrale og vigtigste pointer ved udeskole, er at lave koblingen mellem udeaktiviteterne og undervisningen inde. Eleverne skal fra starten af forløbet gøres opmærksomme på, hvad det er, de skal lære med de efterfølgende aktiviteter. På den måde kan læreren både ude og inde hele tiden tale med eleverne ud fra læringsmålene. I eksemplet om brøker i skolegården, hvor der blev arbejdet med tiendedele, blev der efterfølgende, da eleverne kom ind i klassen, gjort meget ud af at tale om, hvad de havde fundet ud af, og hvad brøken egentlig bestod af. Her blev også italesat begreber som tæller, nævner, brøkstreg og at forlænge/forkorte brøker. Generelt brugte eleverne fortrinsvist deres hverdagssprog, når de var ude, og derfor er kommunikationen omkring symbolsprog eller at sætte den formelle matematik på, når eleverne er i klasseværelset, utrolig central og måske det allervigtigste element i forhold til elevernes læring. ●

Se mere her
https://www.youtube.com/watch?time_continue=3&v=kwfjbwAn4D8

Litteraturliste
- Daugaard, L.M. (2008). Samspillet mellem hverdagssprog og matematiksprog i matematikundervisningen i flersprogede klasserum. I Sproget med i alle fag. København: Undervisningsministeriet.
- Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. Educational Studies in Mathematics.61 (1/2), s. 103-131.
- Hansen, R. (2015). At styre efter målet i matematik. I MONA nr. 1-2015.
- Jordet, A. (2003). Lutvann-undersøkelsen. En case-studie om uteskolens didaktikk. Delrapport 2: En undersøkelse av innhold og metoder i uteskolen på Lutvann skole. Elverum: Høgskolan i Hedmark.
- Webb, D.C., Boswinkel, N. & Dekker, T. (2008). Beneath the Tip of the Iceberg: Using Representations to Support Student Understanding. Mathematics Teaching in the Middel School, 14 (2), s. 110-113.